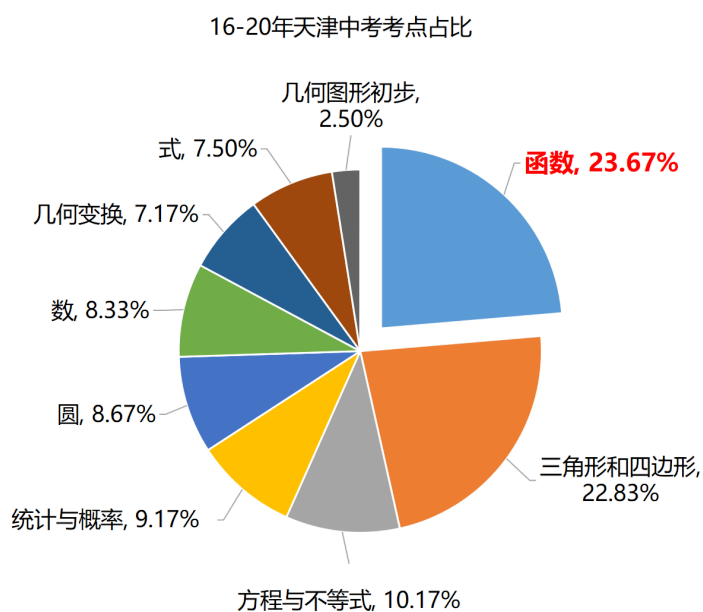


第1讲二次函数与三角形存在性

《二次函数与存在性问题》是《函数基础》、《二次函数提高》的后续模块，常以25题的形式出现在模考和中考中，难度偏高，题目的综合性较强，需要学生熟练掌握三角形、四边形的性质与判定，全等三角形、相似三角形的性质和判定、三角函数等，重点探究其综合运用，构建一定的知识体系。

本模块侧重于二次函数的代几综合，难度较大，适用于二次函数综合的查漏补缺，存在性问题的短期突破。本模块分为二次函数与三角形存在性、二次函数与四边形存在性、二次函数与角度存在性 3 讲内容，配套练习进一步巩固所学内容，专项练习，巩固重难点。

知己知彼

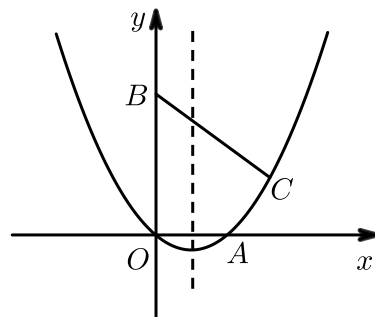


年份	分值	占比	题号	知识点
2020	10	8%	25	最值问题
2019	10	8%	25	最值问题
2018	10	8%	25	存在性问题
2017	10	8%	25	最值问题
2016	10	8%	25	定值问题

1. 等腰三角形

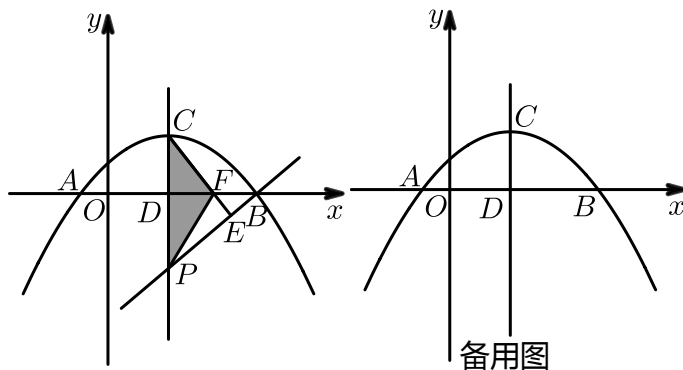
典题精练

1. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = \frac{1}{6}x^2 + bx + c$ 经过原点 O ，与 x 轴交于点 $A(5, 0)$ ，第一象限的点 $C(m, 4)$ 在抛物线上， y 轴上有一点 $B(0, 10)$ 。



- (1) 求抛物线的解析式及它的对称轴。
- (2) 点 $P(0, n)$ 在线段 OB 上，点 Q 在线段 BC 上，若 $OP = 2BQ$ ，且 $PA = QA$ ，求 n 的值。
- (3) 在抛物线的对称轴上，是否存在点 M ，使以 A, B, M 为顶点的三角形是等腰三角形？若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由。

2. 抛物线 $y = -\frac{2}{9}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$, $B(5, 0)$ 两点, 顶点为 C , 对称轴交 x 轴于点 D , 点 P 为抛物线对称轴 CD 上的一动点 (点 P 不与 C , D 重合). 过点 C 作直线 PB 的垂线交 PB 于点 E , 交 x 轴于点 F .



- (1) 求抛物线的解析式.
- (2) 当 $\triangle PCF$ 的面积为 5 时, 求点 P 的坐标.
- (3) 当 $\triangle PCF$ 为等腰三角形时, 请直接写出点 P 的坐标.

3. 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 y 轴交于点 $C(0, -4)$, 与 x 轴交于点 A, B , 且 $B(2, 0)$.

(1) 求该抛物线的解析式 .

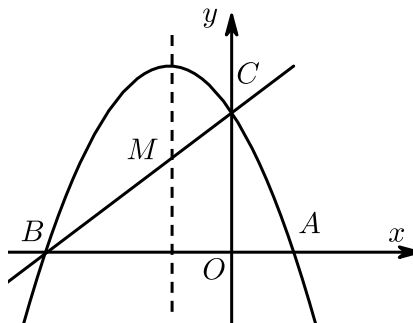
(2) 若点 P 是线段 AB 上的一动点 , 过点 P 作 $PE \parallel AC$, 交 BC 于点 E , 连接 CP , 求 $\triangle PCE$ 面积的最大值 .

(3) 若点 D 为 OA 的中点 , 点 M 是线段 AC 上一点 , 且 $\triangle OMD$ 为等腰三角形 , 求 M 点的坐标 .

2. 直角三角形

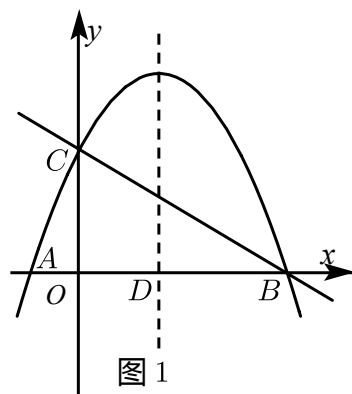
典题精练

4. 如图，已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的对称轴为直线 $x = -1$ ，且抛物线经过 $A(1, 0)$ ， $C(0, 3)$ 两点，与 x 轴交于点 B 。

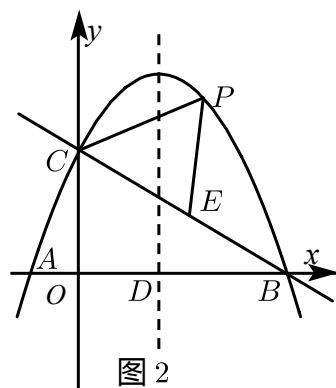


- (1) 若直线 $y = mx + n$ 经过 B 、 C 两点，求直线 BC 和抛物线的解析式。
- (2) 设点 P 为抛物线的对称轴 $x = -1$ 上的一个动点，求使 $\triangle BPC$ 为直角三角形的点 P 的坐标。

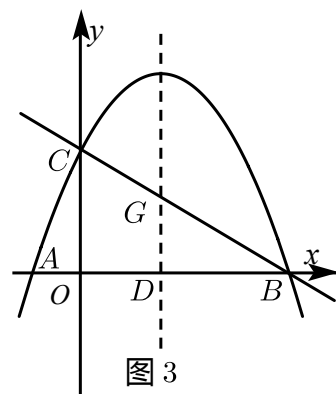
5. 如图1，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C ，对称轴与 x 轴交于点 D 。



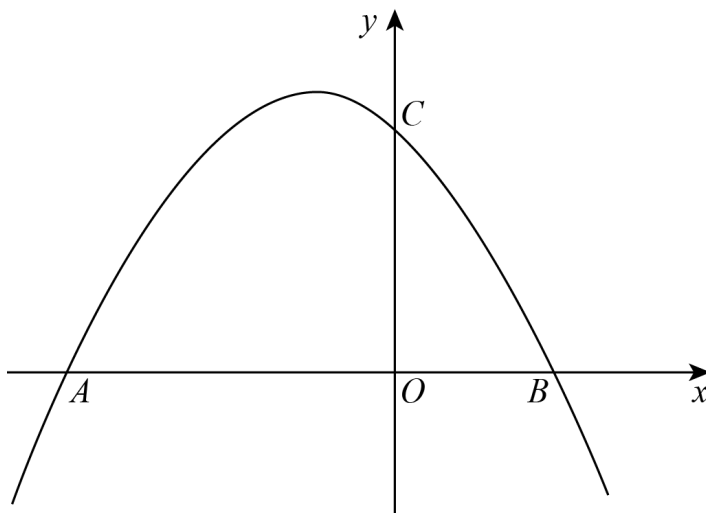
- (1) 求直线 BC 的解析式。
- (2) 如图2，点 P 为直线 BC 上方抛物线上一点，连接 PB 、 PC 。当 $\triangle PBC$ 的面积最大时，在线段 BC 上找一点 E （不与 B 、 C 重合），使 $PE + \frac{1}{2}BE$ 的值最小，求点 P 的坐标和 $PE + \frac{1}{2}BE$ 的最小值。



- (3) 如图3，点 G 是线段 CB 的中点，将抛物线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ 沿 x 轴正方向平移得到新抛物线 y' ， y' 经过点 D ， y' 的顶点为 F 。在抛物线 y' 的对称轴上，是否存在一点 Q ，使得 $\triangle FGQ$ 为直角三角形？若存在，直接写出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由。



6. 抛物线 $y = -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 3$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C 。

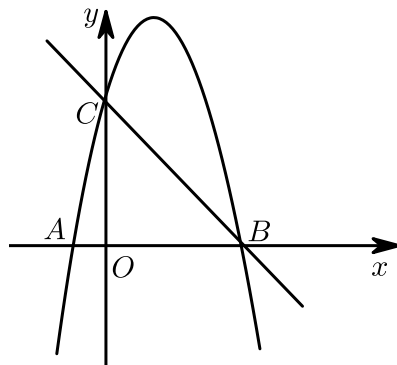


- (1) 求点 A 、 B 的坐标。
- (2) 设 D 为已知抛物线的对称轴上任意一点，当 $\triangle ACD$ 的面积等于 $\triangle ACB$ 的面积时，求点 D 的坐标。
- (3) 当直线 l 过点 $E(4, 0)$ ， M 为直线 l 上的动点，当以 A 、 B 、 M 为顶点所作的直角三角形有且只有三个时，求直线 l 的解析式。

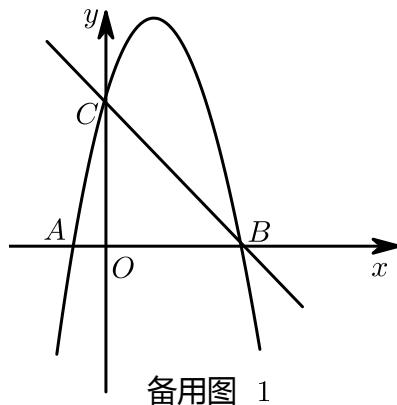
3. 等腰直角三角形

典题精练

7. 如图，开口向下的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 交 x 轴于 $A(-1, 0)$ ， $B(5, 0)$ 两点，交 y 轴于点 $C(0, 5)$ 。



- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 设抛物线的顶点为 D ，求 $\triangle BCD$ 的面积。
- (3) 在 (2) 的条件下， P, Q 为线段 BC 上两点 (P 左 Q 右，且 P, Q 均不与 B, C 重合)， $PQ = 2\sqrt{2}$ ，在第一象限的抛物线上是否存在这样的点 R ，使 $\triangle PQR$ 是以 RQ 为底边的等腰直角三角形？若存在，求出的 R 的坐标；若不存在，请说明理由。



8. 如图，抛物线 $L: y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 $B(3, 0)$ 两点（ A 在 B 的左侧），与 y 轴交于点 $C(0, 3)$ ，已知对称轴为直线 $x = 1$ 。

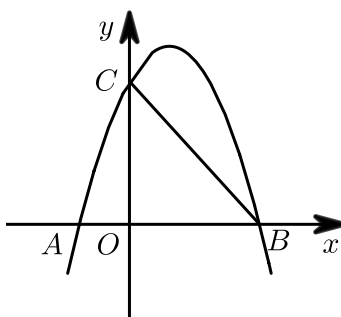


图 (1)

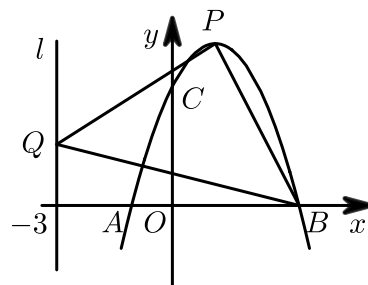
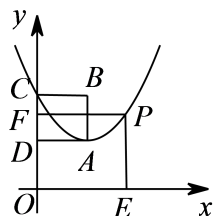


图 (2)

- (1) 求抛物线 L 的解析式。
- (2) 将抛物线 L 向下平移 h 个单位长度，使平移后所得抛物线的顶点落在 $\triangle OBC$ 内（包括 $\triangle OBC$ 的边界），求 h 的取值范围。
- (3) 设点 P 是抛物线 L 上任一点，点 Q 在直线 $l: x = -3$ 上， $\triangle PBQ$ 能否成为以点 P 为直角顶点的等腰直角三角形？若能，求出符合条件的点 P 的坐标；若不能，请说明理由。

9. 如图，在平面直角坐标系中，点 A 、 B 的坐标分别为 $(1,1)$ 、 $(1,2)$ ，过点 A 、 B 分别作 y 轴的垂线，垂足为 D 、 C ，得到正方形 $ABCD$ ，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过 A 、 C 两点，点 P 为第一象限内抛物线上一点（不与点 A 重合），过点 P 分别作 x 轴、 y 轴的垂线，垂足为 E 、 F ，设点 P 的横坐标为 m ，矩形 $PFOE$ 与正方形 $ABCD$ 重叠部分图形的周长为 l 。

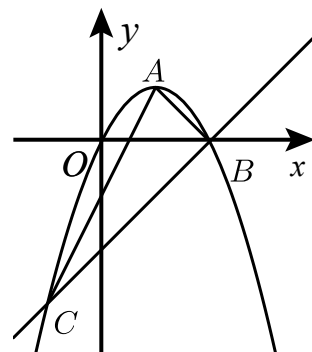


- (1) 直接写出抛物线所对应的函数表达式。
- (2) 当矩形 $PFOE$ 的面积被抛物线的对称轴平时，求 m 的值。
- (3) 当 $m < 2$ 时，求 l 与 m 之间的函数关系式。
- (4) 设线段 BD 与矩形 $PFOE$ 的边交于点 Q ，当 $\triangle FDQ$ 为等腰直角三角形时，求 m 的取值范围。

4. 相似三角形

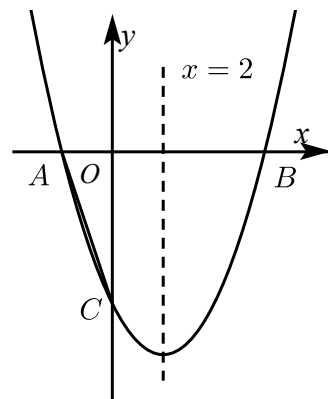
典题精练

10. 如图，在平面直角坐标系中，已知抛物线经过原点 O ，顶点为 $A(1,1)$ ，且与直线 $y = x - 2$ 相交于 B ， C 两点．



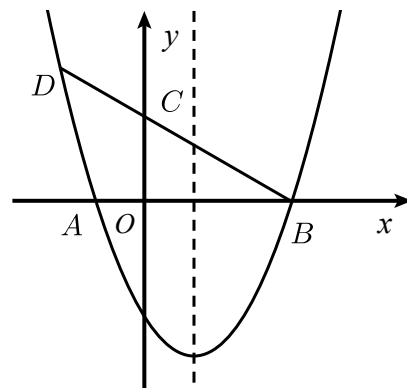
- (1) 求抛物线的解析式．
- (2) 求 B 、 C 两点的坐标．
- (3) 若点 N 为 x 轴上的一个动点，过点 N 作 $MN \perp x$ 轴与抛物线交于点 M ，则是否存在以 O ， M ， N 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似？若存在，请求出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由．

11. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(-2, 0)$ ， $C(0, -6)$ ，其对称轴为直线 $x = 2$ 。



- (1) 求该二次函数的解析式。
- (2) 若直线 $y = -\frac{1}{3}x + m$ 将 $\triangle AOC$ 的面积分成相等的两部分，求 m 的值。
- (3) 点 B 是该二次函数图象与 x 轴的另一个交点，点 D 是直线 $x = 2$ 上位于 x 轴下方的动点，点 E 是第四象限内该二次函数图象上的动点，且位于直线 $x = 2$ 右侧。若以点 E 为直角顶点的 $\triangle BED$ 与 $\triangle AOC$ 相似，求点 E 的坐标。

12. 如图，抛物线 $y = \frac{3+\sqrt{3}}{6}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A, B 两点，点 A, B 分别位于原点的左、右两侧，
 $BO = 3AO = 3$ ，过点 B 的直线与 y 轴正半轴和抛物线的交点分别为 C, D ， $BC = \sqrt{3}CD$ 。



- (1) 求 b, c 的值。
- (2) 求直线 BD 的函数解析式。
- (3) 点 P 在抛物线的对称轴上且在 x 轴下方，点 Q 在射线 BA 上。当 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BPQ$ 相似时，请直接写出所有满足条件的点 Q 的坐标。